Ex-1

$A = (1 \cdot 2\ 3)$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} -1 & \cancel{1}3 \\ -1 & -4\ 0 \\ 0 & 2\ 5 \end{pmatrix}$.

- A st matrice ligne type(1, 3) $\quad A_{1,3}$
- B st matrice colonne type(2, 1) $\quad B_{2,1}$
- C st matrice rectangle type(3, 2) $\quad C_{3,2}$
- D st matrice carrée d'ordre 2 $\quad D_{2,2}$
- D st " " " 3 $\quad D_{3,3}$
- C " " "

Le produit des deux matrices M et N st possibles si et seulement si le nombre de colonnes de la première matrice st égal au nombre de lignes de la 2e matrice.

$P = M.N$ ss $P = M_{n,q}\ N_{q,r}$

ligne colon lignes colon

Le résultat st matrice de n ligne et r colonnes $\quad P_{n,r} = (M.N)_{n,r}$.

A.ABID

on dressera un tableau montrant les possibilités de la multiplication

X	A (1,3)	B (2,1)	C (3,2)	D (2,2)	E (3,3)
A (1,3)	~~A A~~ A→3c A→1l	~~A B~~ A→3c B→2l	$\boxed{A.C}$ A→3c C→3l	~~A D~~ A→3c D→2l	$\boxed{A\,E}$ A→3c E→3l
B (2,1)	$\boxed{B.A}$ B→1c A→1l	~~B B~~ B→1c B→2l	~~B C~~ B→1c C→3l	~~B D~~ B→1c D→2l	~~B E~~ B→1c E→3l
C (3,2)	~~C A~~ C→2c A→1l	$\boxed{C\,B}$ C→2c B→2l	~~C C~~ C→2c C→3l	$\boxed{C\,D}$ C→2c D→2l	~~C E~~ C→2c E→3l
D (2,2)	~~D A~~ D→2c A→1l	$\boxed{D\,B}$ D→2c B→2l	~~D C~~ D→2c C→3l	$\boxed{D.D}$ D→2c D→2l	~~D E~~ D→2c E→3l
E (3,3)	~~E A~~ E→3c A→1l	~~E B~~ E→3c B→2l	$\boxed{E.C}$ E→3c C→3l	~~E D~~ E→3c D→2l	$\boxed{E.E}$ E→3c E→3l

$M_{(n,m)}$ M → n ligne (n.l)
M → m colonne (m.c)

Les produits possibles encadrés sont :
A.C ; A.E ; B.A ; CB ; CD ; DB , DD, EC et EE

2) les matrices carrées sont celles qui ont le même nombre de lignes et de colonnes.

D est matrice carrée 2l = 2c

E est matrice carrée 3l = 3c.

M. ABID

Une matrice M est symétrique si elle est égale à sa transposée (^tM) [M doit être une matrice carrée]

* $A = (1, 3) \longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; ${}^tA \neq A$

* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tB = (1, -2)$; ${}^tB \neq B$

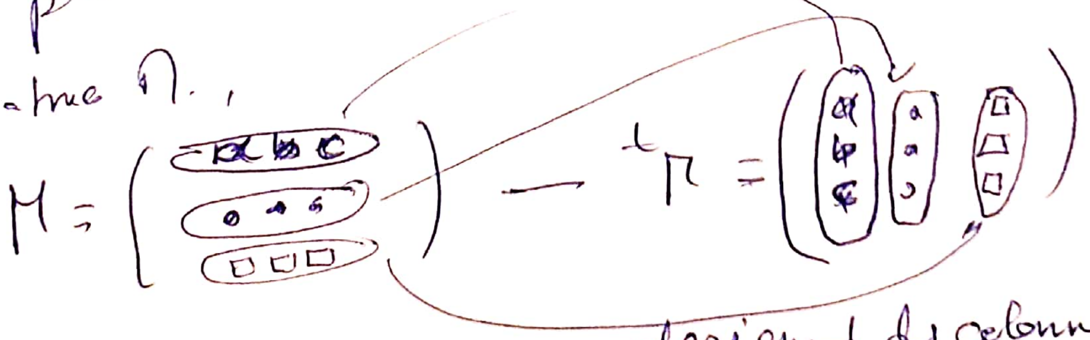
* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow {}^tC = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ${}^tC \neq C$

* $D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tD = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{{}^tD = D}$

* $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow {}^tE = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ${}^tE \neq E$

La seule matrice symétrique est la matrice carrée D

Rappel, pour obtenir la matrice transposée à partir d'une matrice M,



les lignes $\longrightarrow$ deviennent des colonnes

ou les colonnes $\longrightarrow$ deviennent des lignes

M. Achoui D

Cette partie n'est pas demandée,

$$A\cdot C = (1, 2, 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1, 7)$$

$$A\circ E = (1, 2, 3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (-3, -1, 18).$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$C\circ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -15 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$DD = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}.$$

$$EC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E.E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 \\ 5 & 15 & -3 \\ -2 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

D.ABBID

Ex2

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A et B sont deux matrices carrées d'ordre deux du même type donc le produit AB et BA sont possibles.

$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque que A et B sont deux matrices non nulles mais leur produit est nul. donc on peut conclure que

si ~~$A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$~~ $A \neq 0$ matrice nulle · AB peut être égale à 0.
$B \neq 0$

si si $A.B = 0$ alors cela ne veut pas dire que $A = 0$ ou $B = 0$.

Supp que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

$\mathbb{1} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Rq * $\left.\begin{array}{l} AB = B \\ \mathbb{1} B = B \end{array}\right\} \not\Rightarrow A = \mathbb{1}$

~~(AB)~~ * $AB \neq BA$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

le produit AB n'est pas possible car.

$$A_{3,\boxed{3}} \times B_{\boxed{2},3}$$

$$\boxed{3} \neq \boxed{2}$$

nbre de ligne, nbre de colonnes, nbre de ligne, nbre de colonnes

par contre BA est possible car

$$B_{2,\boxed{3}} \times A_{\boxed{3},3}$$

$$\boxed{3} = \boxed{3}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

3). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$[A_{3,2}] \times [B_{2,4}]$$

$$2 = 2$$

le produit est possible

Résultat $[(AB)_{3,4}]$ est une matrice de 3 lignes et 4 colonnes

$$[B_{2,4}] \times [A_{3,2}]$$

$$4 \neq 3$$

le produit n'est pas possible

n ABI'D

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{3 \text{ lign.} \\ 2 \text{ colon.}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{2 \text{ lign.} \\ 4 \text{ colonn.}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{}$$

$= 3$ lignes, 4 colonnes

Exerc 3

B commute avec A ss.

$$AB = BA. \qquad \text{(B et A sont de même ordre)}$$

$$B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \qquad x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ az & aw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bx \\ az & aw+bz \end{pmatrix}$$

Deux Matrices sont egales si leurs composants sont egales $\Rightarrow$

$ax - ax + bz = (\underbrace{a-a}_{0})x + bz = 0x \cdot bz = 0$

$ax + bz = ax \Rightarrow 0 \cdot x + bz = 0 \Rightarrow x$ qq.

$ay + bw = ay + bx \Rightarrow 0 \cdot y + b(w - x) = 0 \Rightarrow \boxed{w = x}$

$\Rightarrow y$ qq

$az = az \Rightarrow 0 \cdot z = 0$

$aw = aw + bz \Rightarrow 0 \cdot w + bz = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

N. ABOUD

donc la forme de la matrice B qui commute avec A

si

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

vérifier.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bx \\ 0 & ax \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bx \\ 0 & ax \end{pmatrix}$$

Ex 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

on remarque que

$AB = AC$. Mais cela ne veut pas dire $B = C$

c.a.d $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

M. ABS

2) La matrice A n'est pas inversible, en effet on peut remarquer qu'elle est formée par deux colonnes identiques c.a.d que son déterminant est nulle. ainsi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Rappelez vous que pour qu'une matrice soit inversible il faut que son déterminant soit différent de zéro.

3) $F \in M_3(\mathbb{R})$

$$F = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}$$

$$AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & b = 0 & c = 0 \\ d+g = 0 & e+h = 0 & f+i = 0 \\ 3a+d+g = 0 & 3b+e+h = 0 & 3c+f+i = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b = c = 0 \\ g = -d \quad h = -e \quad i = -f \end{cases}$$

D. ABID

donc F est de la forme

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}$$

on vérifie bien que

$$AF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Pour determiner le rang de la matrice M, on utilisera la méthode de Gauss (voir cours et complément).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \qquad \text{rang}(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le rang de la matrice A est égale au plus grand sous-determinant non nul de la matrice ~~carrée~~ carrée extrait de M Sol.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = -1 \neq 0 \quad \text{son ordre est } 2 \Rightarrow$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

D, ABS'D

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$

donc le rang de B est $= 3$

$$\underline{\underline{rg(B) = 3}}$$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ———

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ le rang de la matrice C est celui de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit 2

$$rg(C) = 2$$

N. ABDI

pour la matrice E

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{on alle} \\ L_4 \leftrightarrow L_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la sous matrice extraite d'ordre maximale dont le déterminant est $\neq 0$ est , son ordre est 3

$\Rightarrow \quad rg(E) = 3$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2I - A$$

$$\Rightarrow A^2 = 2I - A.$$

D_Abz ID

A est inversible si $\exists$ B /

$$BA = AB = I \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B : l'inverse de A sera noté A^{-1}

$$\boxed{A^{-1} = B} \cancel{= A}$$

$$A^2 = 2I - A \Rightarrow A^2 + A = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I$$

Remq $A = AI = IA$.

$$\frac{1}{2}(A^2 + A) = \frac{1}{2}(A^2 + IA) = \frac{1}{2}(A^2 + AI)$$

$$= \frac{1}{2}(A.A + IA) = \frac{1}{2}(A.A + AI)$$

$$= \frac{1}{2}(A + I)A \quad = \frac{1}{2}A(A \cancel{+A} I)$$

pour $B = \frac{1}{2}(A + I)$,

donc on aura $AB = BA = I$

donc B est la matrice inverse de A, il s'ensuit que

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(I + A)}$$

Soit
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$